

Dinamični model Osončja

Barbara Rovšek, Zavod Cosmolab in Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani



V merilu, ki je tako, da lahko na šolskem dvorišču (igrišču za nogomet) narišemo vsaj še tirnico Jupitra, uprizarimo gibanje planetov okoli Sonca.

Na koncu dejavnosti bodo učenci vedeli, da

1. bolj, kot je planet (ali asteroid) oddaljen od Sonca, več časa potrebuje, da opravi cel obhod (daljše je njegovo leto),
2. dlje, kot je planet od Sonca, počasneje se giblje,
3. se vsi planeti gibljejo okoli Sonca v skoraj isti ravnini,
4. so tirnice planetov bolj ali manj eliptične in
5. da se telo na eliptični tirnici giblje hitreje, ko je bližje Sonca in počasneje, ko je dlje stran od njega.
6. Razumeli bodo, da so obdobja, ko planete lahko opazujemo, ker je njihova trenutna kotna razdalja do Sonca dovoljšnja, in obdobja, ko jih ne moremo opazovati, ker so na nebu preblizu Soncu, ki nas slepi.
7. da se planeti kdaj poravnajo,
8. poznali bodo pojme konjunkcija, opozicija, elongacija ter
9. imeni Kepler in Newton povezali s tirnicami planetov.

Ne nujno v tem vrstnem redu.

Pripomočki, ki jih potrebujemo:

- metrski trak (1 m),
- metrski trak (10 m),
- (barvne) krede za risanje po asfaltu,
- vrvica (20 m ali več),
- škarje

Dejavnost prilagodimo konkretnim ciljem ter starosti in sposobnosti učencev. Besedilo v nadaljevanju ni učna priprava, lahko pa služi kot osnova za pripravo lastne učne priprave.

Podatki in merilo

V tabeli 1 so podatki o obhodnem času planetov okoli Sonca, njihovi povprečni hitrosti pri enem obhodu, povprečnem polmeru in *izsrednosti* njihovih tirnic okoli Sonca ter nagnjenosti ravnine, v kateri planeti krožijo okoli Sonca, glede na *ekliptično ravnino* (nagnjenosti njihovih tirnic glede na ekliptiko). Povprečni polmer tirnice \bar{r} izračunamo iz obhodnega časa planeta t_o in njegove povprečne hitrosti \bar{v} : pot, ki jo v enem letu opravi, je $s_o = \bar{v}t_o = 2\pi\bar{r}$.

Tabela 1: Podatki o obhodnih časih, hitrostih in tirnicah planetov Osončja (vir: Wikipedia).

objekt	obhodni čas t_o	povprečna hitrost \bar{v}	povprečni polmer tirnice \bar{r}		izsrednost tirnice ε	nagnjenost tirnice
	[dnevi]	[km/s]	[10 ⁶ km]	[a.e.]		[°]
Merkur ☿	87,97	47,36	57,9	0,3871	0,206	7,0
Venera ♀	224,7	35,02	108,2	0,7233	0,007	3,4
Zemlja ♂	365,25	29,78	149,6	1,000	0,017	0
Mars ♂	687,0	24,07	227,9	1,524	0,093	1,9
Jupiter ♃	4332,6	13,06	778,5	5,204	0,049	1,3
Saturn ♄	10756	9,68	1433,5	9,583	0,056	2,5
Uran ♅	30689	6,80	2871	19,19	0,047	0,8
Neptun ♆	60195	5,43	4500	30,07	0,009	1,8

Od krožnice znatno odstopa le tirnica Merkurja (izsrednost Merkurjeve eliptične tirnice je 0,2). Merkur je med planeti Osončja rekorder tudi v nagnjenosti svoje tirnice (oziroma ravnine, v kateri leži tirnica, *inklinaciji*) glede na ekliptiko, ki je 7° (za primerjavo, Lunina tirnica je nagnjena glede na ekliptiko za 5°). Ker so koti med ravninami tirnic planetov in ekliptično ravnino vsi majhni, se tudi tirnice planetov, projicirane na ekliptično ravnino, malo razlikujejo od krožnic (projekcija krožnice na ravnino, ki je nagnjena glede na ravnino, v kateri je, je elipsa). V osnovni različici dejavnosti izsrednosti tirnic in nagnjenosti tirnic glede na ekliptiko **ne** upoštevamo.

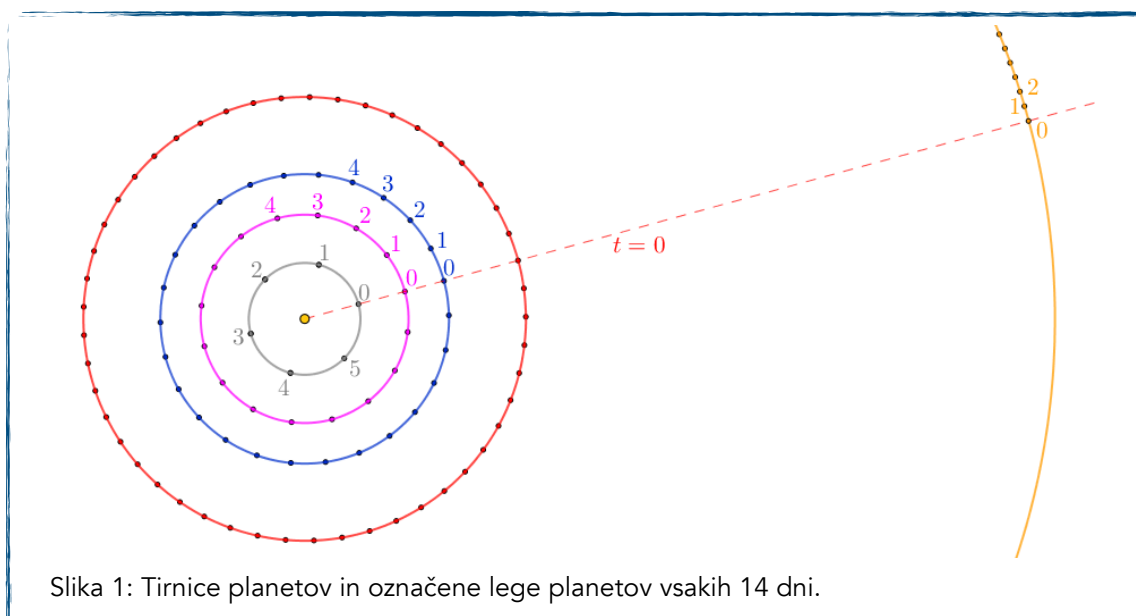
Za model izberemo merilo, v katerem meri povprečni polmer Merkurjeve tirnice 58 cm (zaokroženih 57,9 cm, glej 4. stolpec v tabeli 1; z drugimi besedami: razdaljo 1 milijon km v naravi prikažemo z razdaljo 1 cm v modelu). To je tudi dolžina najdaljšega koraka, ki ga opravi oseba, ki bo v nadaljevanju s svojim gibanjem predstavljala Merkur. Polmeri tirnic ostalih planetov so zapisani v 2. stolpcu tabele 2. Glede na širino običajnega šolskega nogometnega igrišča lahko na njem prikažemo še tirnico Saturna.

Model Osončja

Najbolje, da tirnice planetov prikažemo na asfaltiranem šolskem igrišču. Pripravimo prvi komplet vrvic z dolžinami enakimi polmerom tirnic planetov v modelu (2. stolpec tabele 2) in drugi komplet vrvic z dolžinami enakimi dolžinam korakov (4. stolpec tabele 2). Na sredini igrišča s kredo označimo lego Sonca. Narišemo krožne tirnice okoli Sonca, pri čemer si pomagamo z vrvicami iz prvega kompleta. Naj bodo na začetku planeti poravnani na isti črti: narišemo to ravno črto (poltrak) od Sonca stran. Kjer poltrak seka tirnice, so lege planetov ob času $t = 0$. Te lege označimo s številko 0. Potem na tirnicah označimo lege planetov po 14 dnevih, 28 dnevih ..., pri čemer si pomagamo z vrvicami iz drugega kompleta. Začnemo pri legi ob času $t = 0$ in od tam nadaljujemo, dokler ne naredimo celega obhoda (za planete od vključno Jupitra naprej štetje korakov zaključimo prej in ne označujemo cele tirnice ...). Korake označimo z zaporednimi številkami 1, 2, 3 ... V tlorisu je nastali model Osončja prikazan na sliki 1.

Tabela 2: Polmer tirnic planetov, približni obhodni časi, število korakov in dolžina koraka.

planet	polmer tirnice [m]	zaokrožen obhodni čas = število korakov [mnogokratnik 14 dni]	dolžina koraka [cm]
Merkur ☿	0,58	6	58
Venera ♀	1,08	16	42
Zemlja ♂	1,50	26	36
Mars ♂	2,3	49	29
Jupiter ♃	7,8	310	16
Saturn ♄	14	768	11
Uran ♅	29	2192	8,3
Neptun ♆	45	4300	6,6



Slika 1: Tirnice planetov in označene lege planetov vsakih 14 dni.

V osnovni različici modela smo obhodne čase zaokrožili na mnogokratnik 14 dni; število korakov, ki jih na tirnici opravi planet, pa na celo število. Zato se posamični planet, ko opravi cel obhod po svoji tirnici na šolskem igrišču, zopet znajde v svoji začetni legi na tirnici. Planeti v naravi pa svojih poti ne zaokrožujejo na tak način; njihovi obhodni časi niso natančni mnogokratniki 14 dni. O takih podrobnostih in kako vplivajo na pojave, ki jih preučujemo, se lahko z učenci pogovorimo v zaključnem delu dejavnosti.

Hitrost planetov

Učitelj_ica je Sonce in stoji na igrišču, kjer je označena lega Sonca. Izbere 6 učenk in učencev, ki bodo odigrali planete od Merkurja do Saturna. Planeti se postavijo na svoje začetne lege. Naloga vsakega od njih je, da hodi po svoji tirnici s hitrostjo, ki ustreza hitrosti planeta, ki ga predstavlja. Učitelj_ica ploska enakomerno, v taktu; na vsak plosk se vsak planet premakne na svoji tirnici za 14 dni naprej; opravi torej 1 korak do naslednje označene lege.

Ostali učenci opazujejo gibanje planetov. Ko se Merkurju zvrsti v glavi (ali pa raje malo prej) in ima dovolj tega vrtiljaka, prenehajo z gibanjem in komentirajo opaženo. Opazili so:

- da Merkur opravi cel obhod v najkrajšem času in da je obhodni čas tem večji, čim dlje stran je planet od Sonca,
- da Merkur dela najdaljše korake, kar pomeni, da se giblje najhitreje. Čim dlje je planet od Sonca, tem počasneje se giblje.

Poleg tega, kar je očitno in opazijo vsi učenci, pozornost usmerimo še na druge zanimive podrobnosti in okoliščine, na katere morda niso pomislili sami.

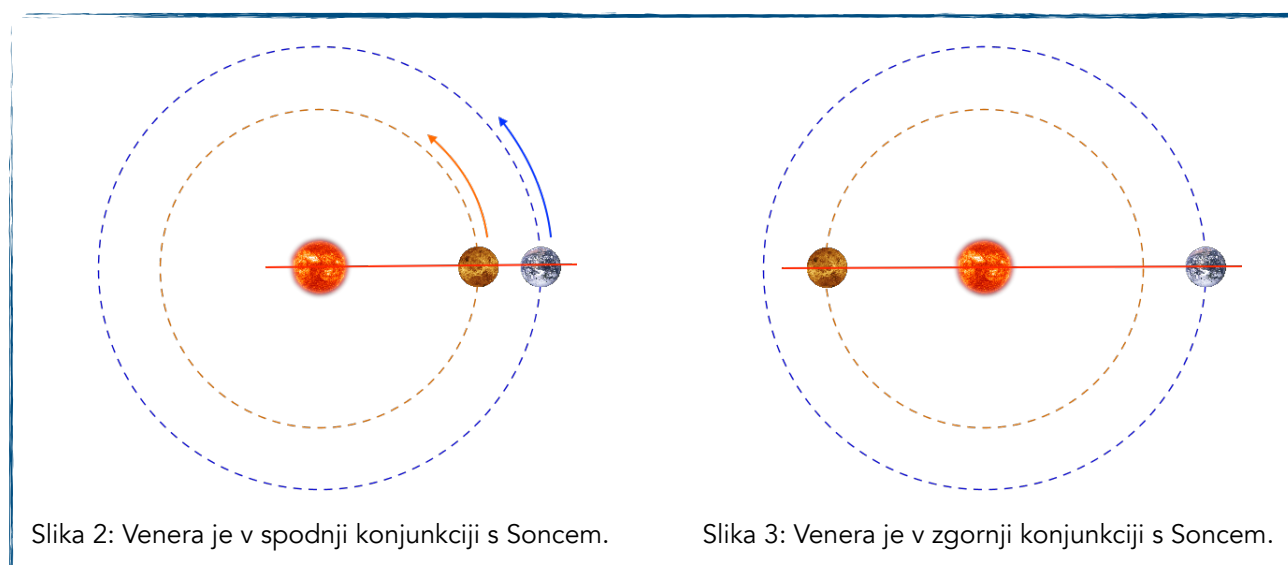
Poravnava planetov

Na začetku so bili Sonce in vsi planeti poravnani na isti premici (ker smo si tako izbrali). V nadaljevanju se še kdaj zgodi, da so na isti premici 3 telesa (2 pa vedno). Če je eno telo Sonce, sta ostali dve planeta. Kateri planet se najpogosteje znajde poravnani s Soncem in še enim planetom? S katerim planetom se bo najprej ponovno poravnal in s katerim nazadnje? Kje se bo ta poravnava zgodila (ali je planet opravil cel obhod)?

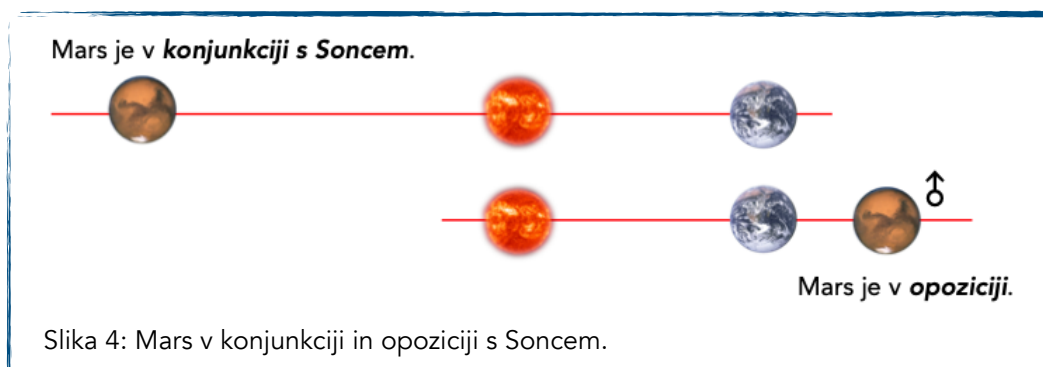
Konjunkcija, spodnja in zgornja, in opozicija

Všeč nam je, kako smo posebne lege planetov opisali pri navodilih za poskus pri Kresnički (6. in 7. razred, 2016/17, Model Osončja). Opise povzemamo.

Konjunkciji bi lahko po domače rekli kar poravnanje teles v Osončju. Pojem se nanaša predvsem na položaj planetov glede na Zemljo in Sonce. Ko je Venera (ali Merkur) med Zemljo in Soncem (kot prikazuje slika 2), pravimo, da je Venera v **spodnji konjunkciji s Soncem**. Ko je Sonce med Venero in Zemljo (kot prikazuje slika 3), pravimo, da je Venera v **zgornji konjunkciji s Soncem**.



Za planete, ki so od Sonca bolj oddaljeni kot Zemlja, pravimo, da so v **konjunkciji**, ko so (gledano z Zemlje) za Soncem. Ko pa je Zemlja med Soncem in planetom in so tri telesa natanko poravnana, potem tej legi pravimo **opozicija**. Tedaj je planet na nebu na nasprotni strani kot Sonce in je v najugodnejši legi za opazovanje (z Zemlje). Mars v konjunkciji in opoziciji s Soncem prikazuje slika 4.

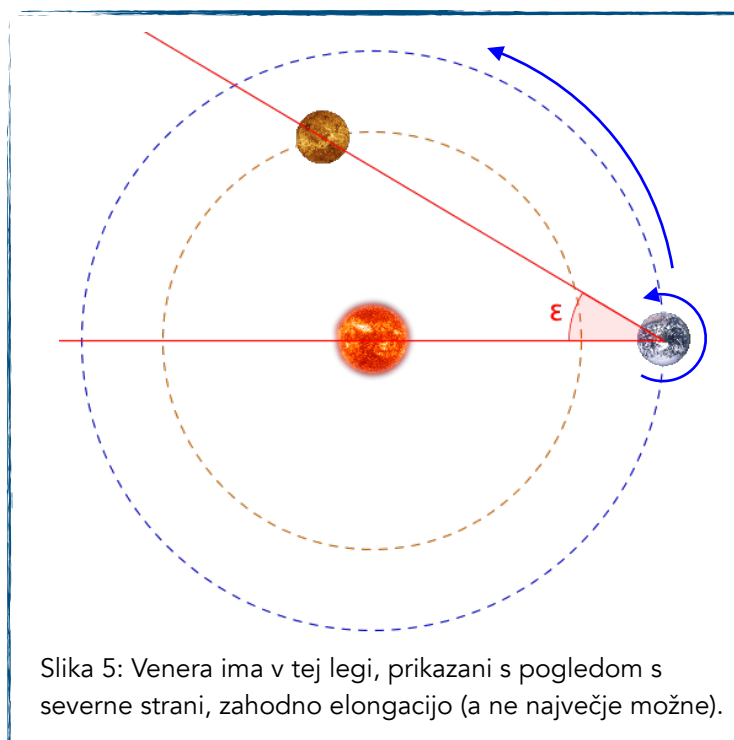


Z učenci preštajmo korake, ko se iz začetne poravnave vseh planetov Merkur in Venera prvič (drugič, tretjič) znajdeti v zgornji in spodnji konjunkciji, in korake, ko se v konjunkciji ali opoziciji znajdeti Mars in Jupiter. Ti dogodki se ponavljajo periodično, število korakov pa ni celo (kdaj bi lahko bilo celo?).

Elongacija, kotna razdalja

Elongacija ϵ je kot (kotna razdalja) med smerjo proti Soncu in smerjo proti planetu, ko ga opazujemo z Zemlje, kot prikazuje slika 5. Največkrat z elongacijo opisujemo legi Venere in Merkurja in njuni kotni oddaljenosti od središča Sončeve ploskvice. Največjo elongacijo ima planet tedaj, ko je navidezno najbolj oddaljen od Sonca. Pri tem ločimo največjo **vzhodno elongacijo**, ko je planet vzhodno od Sonca, in **zahodno elongacijo** planeta, ko je zahodno od Sonca.

Učenci, ki igrajo Merkur, Venero in Zemljo se postavijo v lege, pri katerih je kotna razdalja med Venero (Merkurjem) in Soncem, ko opazujemo z Zemlje, največja; vzhodna in zahodna. Kotno razdaljo lahko tudi merijo in ugotavljajo, kako se spreminja s časom (od koraka do koraka). Meritve kotne razdalje predstavijo z grafom.



Kako se spreminja kotna razdalja med Soncem in Marsom (Jupitrom)? Katere vrednosti lahko zavzame? Kolikšna je kotna razdalja, ko je čas za opazovanje določenega planeta najugodnejši?

Prehod planeta čez Sončevo ploskvico

Prehod Venere in Merkurja čez zveznico med Soncem in Zemljo je podoben Sončevemu mrku, ko zveznico prečka Luna in za kratek čas na Zemljo vrže svojo senco. Merkur in Venera zakrijeta samo zelo majhen del Sončeve ploskvice, zato se moramo za opazovanje tega pojava bolj potruditi. Mars v opoziciji pa je pojav, podoben ščipu oziroma Luninemu mrku, le da Zemljina senca ne sega do Marsa, zato Mars nikoli ne mrkne. Tudi če se znajde v Zemljini polsenci, s prostim očesom malce slabše osvetljenosti Marsove površine ne opazimo.

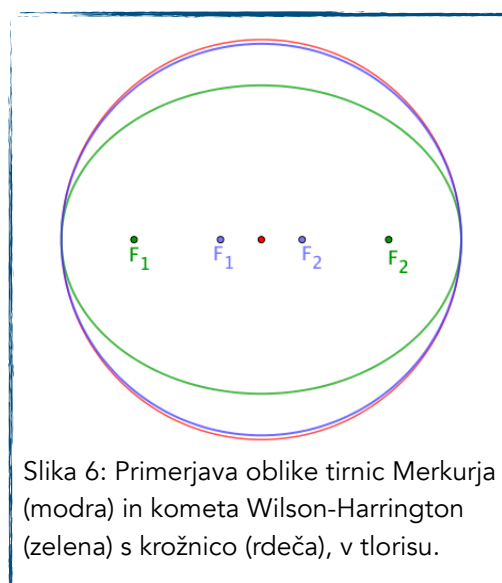
Z učenci se pogovorimo o razlogu, da Merkur in Venera le redko preideta čez Sončevo ploskvico (ki je nagnjenost njunih tirnic glede na ekliptiko). Pogovorimo se lahko o dosegu Zemljine sence.

Eliptičnost tirnic

Med tirnicami planetov je le Merkurjeva tirnica (komaj) opazno sploščena; njena izsrednost (ekscentričnost) je 0,2. Pa še to sploščenost tirnice opazimo le, če je poleg elipse narisana še krožnica, kot prikazuje slika 6.

Z lahkoto pa tudi pri Merkurjevi tirnici opazimo premik **gorišč** F_1 in F_2 stran od središča rdeče krožnice: elipsa ima gorišči, ki sta narazen, kot določa izsrednost elipse. Sonce je v enem od gorišč. Razlika med odsončjem (največjo razdaljo planeta od Sonca, afelijem, 0,47 a.e.) in prisončjem (najmanjšo razdaljo planeta od Sonca, perihelijem, 0,31 a.e.) je za Merkur 0,16 a.e., pri čemer je povprečni polmer tirnice 0,39 a.e.

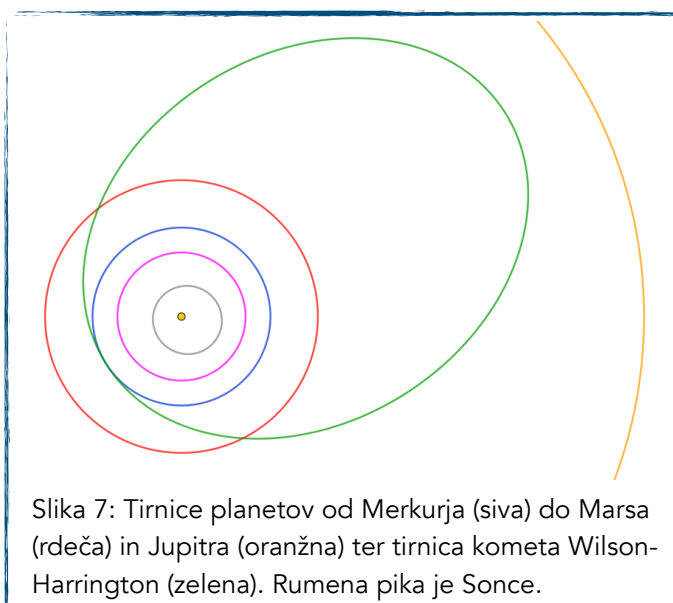
Za prikaz sploščenosti tirnic si izberemo drugo telo, ki potuje okoli Sonca, npr. komet Wilson-Harrington (ali katerega drugega). Njegova tirnica ima izsrednost 0,624, odsončje je 4,3 a.e. od Sonca, prisončje pa 1 a.e. od Sonca (natančneje, 0,993). Obhodni čas kometa je 1566 dni. Oblika tirnice kometa Wilson-Harrington je na sliki 6 prikazana z zeleno.



Slika 6: Primerjava oblike tirnic Merkurja (modra) in kometa Wilson-Harrington (zeleno) s krožnico (rdeča), v tlorisu.

Slika 7 prikazuje bolj točno tirnico Merkurja in kometa Wilson-Harrington projicirani na ekliptično ravnino, v merilu in tlorisu.

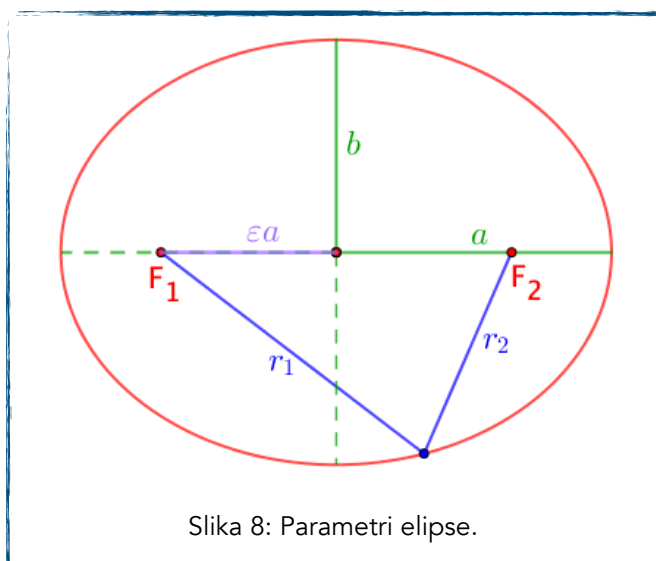
Upoštevamo izsrednost Merkurjeve tirnice, ki je premaknjena toliko, da ima Sonce v gorišču. Para gorišč obeh elips ne ležita na isti premici, ampak oklepata kot približno 60° . Eno gorišče je skupno obema, tam je Sonce.



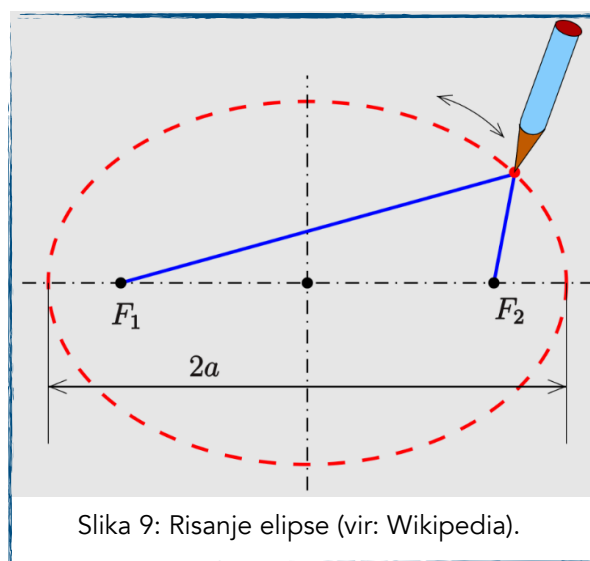
Slika 7: Tirnice planetov od Merkurja (siva) do Marsa (rdeča) in Jupitra (oranžna) ter tirnica kometa Wilson-Harrington (zeleno). Rumena pika je Sonce.

Narišimo Merkurjevo tirnico z "vrtnarsko metodo"

Pri risanju uporabimo lastnost elipse, da je vsota razdalj od poljubne točke na elipsi do obeh gorišč (glej sliko 8) enaka dvakratniku dolžine dolge polosi elipse, $r_1 + r_2 = 2a$.



Slika 8: Parametri elipse.



Slika 9: Risanje elipse (vir: Wikipedia).

Podatki o tirnici Merkurja so v tabeli 3.

Uporabimo enako merilo kot prej, razdaljo 10^6 km v naravi prikažemo z razdaljo 1 cm v modelu. Narišemo premico, ki gre skozi Sonce, in bo na njej ležalo tudi drugo gorišče Merkurjeve tirnice. Vzdolž premice odmerimo razdaljo $2\epsilon a = 23,7$ cm od Sonca in tam označimo lego drugega gorišča tirnice. Pripravimo vrvico z dolžino $2a = 2 \cdot 57,9$ cm = 115,8 cm. Učenka drži prvo krajišče vrvice v prvem gorišču (Soncu), drugo pa v drugem gorišču. S kredo, okoli katere je napeljana raztegnjena vrvica, začrtamo elipso, kot je prikazano na sliki 9.

Tabela 3: Podatki o tirnici Merkurja (vir: Wikipedia).

	[10^6 km]	[a.e.]
odsončje ($a + \epsilon a$)	69,8	0,467
prisončje ($a - \epsilon a$)	46,0	0,307
izsrednost tirnice (ϵ)	0,205	
daljša polos (a)	57,9	0,387
razdalja med goriščima ($2\epsilon a$)	23,7	0,159

Keplerjevi zakoni

Da se spomnimo, kako gredo po vrsti:

1. Tirnice planetov so elipse, Sonce je v enem od gorišč elipse.
2. Zveznica med Soncem in planetom odreže iz elipse v enakih časih kose z enako ploščino. To pomeni, da se planet, ko je bližje Soncu, giblje hitreje kot tedaj, ko je dlje stran od njega.
3. Razmerje med kvadratom obhodnega časa in kubom velike polosi elipse a je za vse planete enako, $\frac{t_0^2}{a^3} = \text{konst.}$

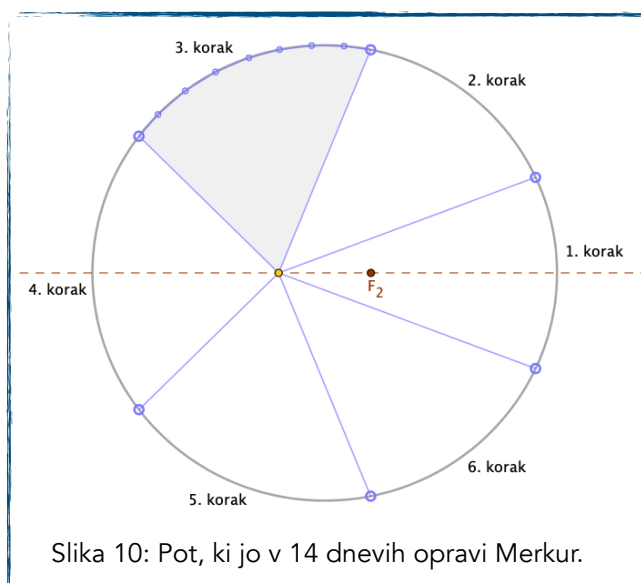
Prvega že imamo pod streho; tretjega pustimo za kasneje; za tokrat nam ostane še drugi.

Vsi Keplerjevi zakoni so empirični, kar pomeni, da jih je Johannes Kepler oblikoval na osnovi opazovalnih podatkov. Izpeljemo jih lahko iz kasneje postavljenih in osnovnih Newtonovih zakonov, drugega in gravitacijskega. Izpeljava nas zdaj ne zanima, posvetimo se le empiričnim dejstvom: hitrosti planeta na eliptični tirnici.

Merkurjevo tirnico smo že pravilneje umestili v ekliptično ravnino. Ker se Merkurjeva oddaljenost od Sonca spreminja, se po 2. Keplerjevem zakonu spreminja tudi njegova trenutna hitrost. To pomeni, da niso vsi Merkurjevi 14-dnevni koraki enako dolgi. Natančen račun premika (koraka) ni prav enostaven (pomeni reševanje diferencialne enačbe), a se zadovoljimo s približno metodo in uporabo GeoGebre (kjer se poslužimo 2. Keplerjevega zakona in "numerične integracije", po domače, seštevanja).

Tirnico že imamo; zdaj jo moramo razrezati na 6 kosov, ki imajo vsi enako ploščino. Različica programa, ki smo ga uporabili, zna izračunati ploščino cele elipse, ne zna pa izračunati ploščine odseka elipse, zato si pomagamo z večkotnikom, ki se dovolj dobro prilega odseku (glej sliko 10).

Ko elipso razrežemo na kose z enako ploščino, uporabimo podobno metodo za merjenje dolžine posameznega koraka: seštejemo dolžine odsekov, s katerimi smo večkotnik priložili k odseku elipse. Glede na to, da smo začetno lego izbrali tako, da se odseki zrcalijo preko nosilke gorišč (kar je le ena od možnih izbir), sta enako dolga 2. in 6. korak ter 3. in 5. korak (glej sliko 10). Obseg eliptične tirnice Merkurja meri v našem modelu 3,63 m, koraki pa so dolgi, od 1. do 4., 50 cm, 54 cm, 65 cm in 74 cm. Pri celem obsegu zgrešimo 1 cm zaradi zaokroževanja (tega ne bomo niti opazili).



Pripravimo si ustrezno dolge vrvice in označimo korake na Merkurjevi tirnici. Po njej naj se v taktu sprehodijo vsi učenci, eden za drugim (pa ne vsi naenkrat!). Kje se gibljejo hitreje?

Dramatično vidnejši učinek dobimo, če se potrudimo, in na korake ustreznih dolžin razdelimo tirnico kometa. Ker ima tirnica kometa večjo izsrednost in bolj razmaknjeni gorišči, je vpliv trenutne lege kometa na tirnici na njegovo hitrost lažje opazen.

Matematika

Dodatna geometrijska vsebina za devetošolce: primerjava obsega pravilnega mnogokotnika, ki ima oglišč toliko, kot je število korakov, in obsega krožnice (tirnice).

