(Notranji) planeti Osončja v merilu

Barbara Rovšek, Zavod Cosmolab in Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani

Notranji planeti Osončja so **Merkur**, **Venera**, **Zemlja** in **Mars**. Naslednji planet po oddaljenosti je Jupiter, ki je od Sonca oddaljen za več kot 3 razdalje med Soncem in Marsom; med Marsom in Jupitrom je širok (glavni) **asteroidni** pas brez planetov, so pa tam, kot namiguje ime, mali planeti (Cerera, najmanjši odkriti pritlikavi planet Osončja) in drugi asteroidi.
Dva izmed notranjih planetov imata enega oziroma dva naravna satelita. Zemlja ima Luno, Mars pa Deimos in Fobos.

Najpomembnejša cilja dejavnosti, opisane v nadaljevanju, sta
1. izdelava (peka) modelov notranjih planetov (in Lune) v merilu samo z uporabo merilnega traku,
2. razvijanje občutka za odvisnost prostornine od linearne razsežnosti 3-dimenzionalnega objekta ($V \propto r^3$).

Pripomočki, ki jih potrebujemo:
- polimerna masa, ki se strdi pri peki (Fimo npr.), za vsakega učenca 1 paket,
- papirnati merilni trak (dolg 1 m), za vsakega učenca svojega in še nekaj rezerve,
- jedilni nož (za 4 učence enega),
- kalkulatorji (odvisno od izpeljave dejavnosti),
- kljunasto merilo (za 4 učence enega),
- laboratorijska tehtnica (za konec, ena).

Dejavnost prilagodimo konkretnim ciljem ter starosti in sposobnosti učencev. Besedilo v nadaljevanju ni učna priprava, lahko pa služi kot osnova za pripravo lastne učne priprave.

Kako veliki so planeti v naravi?

Če želimo modele planetov izdelati v merilu, moramo vedeti, kako razsežni so v naravi. Ker so planeti skoraj okrogli (ta oblika tudi definira razliko med asteroidom, ki je kamen poljubne oblike, in trdnim telesom, ki ga že lahko imenujemo pritlikavi planet in je okrogel), je podatek, ki je mera za velikost planeta in ki ga zlahka najdemo na spletu, povprečni polmer planeta. Ti polmeri so zapisani v tabeli 1 (vir: Wikipedia. Kdor želi vedeti več, lahko iz podrobnejših podatkov, ki jih najde prav tam, ugotovi, koliko oblika posameznega planeta odstopa od povsem krogelne.)

Tabela 1: Povprečni polmer notranjih planetov Osončja in njihovih lun.

planet/luna	oznaka	povprečni polmer [km]
Merkur	☿	$r_☿$ = 2439,7 ± 1,0
Venera	♀	6051,8 ± 1,0
Zemlja	♁	$r_♁$ = 6371,0
Luna	☾	1737,4
Mars	♂	3389,5 ± 0,2
Deimos		6,27 ± 0,07
Fobos		11,08 ± 0,04

Priložnostna enota za polmer planeta in polmer modela planeta

Velika števila z veliko števkami, kot so polmeri planetov, zapisani v tabeli 1, težje primerjamo med seboj kot manjša, z manj števkami. Praktično je, če polmere najprej smiselno zaokrožimo (zmanjšamo število števk) in potem vpeljemo še priložnostno enoto, s katero jih izrazimo (zmanjšamo mersko število). Enoto si izberemo, kot želimo. Ena možnost je, da za priložnostno enoto izberemo polmer Zemlje: ob uporabi te enote bomo takoj vedeli, ali je planet večji ali manjši od Zemlje, in tudi, za kolikšen faktor se polmera razlikujeta. Druga enostavna možnost je, da je enota polmer Merkurja, najmanjšega od notranjih planetov. Zaokroženi polmeri notranjih planetov in njihovih lun so zapisani v tabeli 2 z obema posebnima priložnostnima enotama.

Tabela 2: Zaokrožen povprečni polmer notranjih planetov Osončja in njihovih lun, izražen z različnimi enotami.

planet/ luna	zaokrožen povprečni [km]	[$r_☿$]	[$r_♁$]
Merkur ☿	2440	**1**	0,38
Venera ♀	6052	2,48	0,95
Zemlja ♁	6371	2,61	**1**
Luna ☾	1737	0,71	0,27
Mars ♂	3390	1,39	0,53
Deimos	6,3	0,0026	0,001
Fobos	11,1	0,0045	0,0017

V primeru, ko je enota polmer Merkurja, so številke, zapisane v 3. stolpcu tabele 2, kar razmerja (faktorji) med polmerom posameznega planeta in polmerom Merkurja, $r = k \cdot r_{\mathrm{Me}}$. Številke, zapisane v 4. stolpcu tabele 2 pa so razmerja med polmerom posameznega planeta in polmerom Zemlje.

Glede na to, da je naš cilj izdelava vseh modelov planetov v **istem** merilu, določajo *razmerja polmerov* **modelov planetov** isti faktorji kot razmerja polmerov **planetov**.

Priložnostna enota za polmere modelov planetov bo v nadaljevanju polmer modela Merkurja.

Koliko polimerne mase potrebujemo za posamezni planet?

Prvi cilj te dejavnosti je, da izdelamo modele planetov in Lune v merilu. Marsovih lun ne bomo izdelovali, ker so mnogo manjše od ostalih teles. Modeli bodo 3-dimenzionalne kroglice, ki se med seboj razlikujejo po polmerih za enake faktorje, kot se med seboj razlikujejo polmeri planetov. Kroglice izdelamo iz polimerne mase, ki jo na koncu spečemo, da se strdi in se modeli planetov ne deformirajo.

Vprašanje je, koliko polimerne mase potrebujemo za izdelavo modela posameznega planeta, če imamo na voljo 1 paket mase in bi želeli za izdelavo vseh 4 planetov in Lune porabiti vso. Celotno maso, ki jo imamo, moramo razdeliti na 5 delov, iz katerih bomo izdelali kroglice z ustreznimi polmeri.

Prostornina krogle

Prostornina krogle je $V_\circ = \dfrac{4\pi r^3}{3}$, kjer je r polmer krogle.

Prostornina krogle je sorazmerna tretji potenci svojega polmera. Denimo, da potrebujemo za kroglo s polmerom r_1 polimerno maso s prostornino V_1. Potem potrebujemo za kroglo s polmerom $r_2 = 2r_1$ polimerno maso s prostornino $V_2 = 2^3V_1 = 8V_1$, za kroglo s polmerom $r = k \cdot r_1$ pa potrebujemo polimerno maso s prostornino $V = k^3V_1$.

Če je ***polmer*** planeta B 2-krat (3-krat) tolikšen kot polmer planeta A, je ***prostornina*** planeta B 8-krat (27-krat) tolikšna kot prostornina planeta A.

Razmerje med prostorninami planetov in prostorninami modelov planetov

V tabeli 2 smo zelo prikladno vpeljali priložnostno enoto za polmer modela planeta, polmer modela Merkurja $r_☿$. Zdaj vpeljemo še **priložnostno enoto za prostornino modelov planetov**, ki bo prostornina modela Merkurja $V_☿$. Prostornina modela Venere, ki ima polmer za faktor $k = 2{,}48$ večji od polmera Merkurja, je enaka $V_♀ = 2{,}48^3 \cdot V_☿ = 15{,}3 \cdot V_☿$. Podobno izračunamo tudi faktorje za ostale planete, s katerimi prostornino njihovih modelov izrazimo s prostornino modela Merkurja. Izračunane tretje potence polmerov planetov in Lune (oziroma njihovih modelov), izraženih s 3. potenco polmera Merkurja (oziroma modela Merkurja), so v tabeli 3.

Številke, zapisane v 3. stolpcu tabele 3 so razmerja med prostornino posameznega planeta in prostornino Merkurja, pa tudi razmerja med prostornino *modela* posameznega planeta in prostornino *modela* Merkurja.

Tabela 3: Povprečni polmer notranjih planetov Osončja in njihovih lun ter tretja potenca polmera, izraženo s polmerom Merkurja.

planet/ luna	**povprečni polmer [$r_☿$]**	**polmer³ [$(r_☿)^3$]**
Merkur ☿	**1**	1
Venera ♀	2,48	15,3
Zemlja ♁	2,61	17,8
Luna ☾	0,71	0,36
Mars ♂	1,39	2,68
	vsota	**37,14**

Odmerjanje polimerne mase glede na njeno prostornino

Vsak učenec ima pred seboj kup (ali blok) polimerne mase in iz tega kupa mora izdelati 4 planete in Luno tako, da bodo “velikosti” nastalih kroglic v enakih razmerjih, kot so “velikosti” planetov.

> *Zakaj pišemo “velikosti” in ne kar velikosti? Velikost ni natančno določen pojem in nam včasih pomeni linearno razsežnost teles (polmer ali premer ploskvice planeta), drugič ploščino teles (ploskvic, ki jih vidimo na nebu, na primer Lune ali Sonca, pa tudi oblakov), tretjič pa prostornino teles. V primeru modelov planetov v merilu bodo na koncu vse te “velikosti” v ustreznih razmerjih. Če zadenemo razmerje polmerov, bo pravo tudi razmerje ploščin ploskvic in razmerje prostornin, kar lahko na koncu dejavnosti tudi preverimo.*

V zadnji vrstici tabele 3 je zapisana vsota prostornin vseh modelov v priložnosti prostorninski enoti, prostornini modela Merkurja. Celotno polimerno maso moramo razdeliti na 37,14 enot oziroma delov z enako prostornino (37 celih enot in zadnji del, ki ima prostornino 14/100 enote).

Kako to storimo brez tehtanja, ki nam najprej pride na misel? Polimerno maso razvaljamo v približno 1 m dolg valj, ki je, kolikor je mogoče, **enakomerno debel**. Če želimo, da so modeli planetov na koncu zares v pravem razmerju (v istem merilu), je izjemnega pomena prav ta enakomerna debelina valja. Za to se je pri valjanju polimerne mase vredno potruditi.

Ko smo z valjem zadovoljni (je dovolj dolg in enakomerno debel), izmerimo njegovo dolžino. Denimo, da je valj dolg 102 cm.

Valj (v celoti, da nič polimerne mase ne zmanjka in je nič ne ostane) razdelimo na 5 odsekov, iz katerih oblikujemo kroglice, modele planetov, katerih vse velikosti (polmer, ploščina ploskvic in prostornina) so v pravilnem razmerju. Če je enota Merkur, celotni valj v mislih razdelimo na 37,14 enako dolgih delov, kot nam pove vsota vseh prostornin v zadnji vrstici tabele 3. Dolžina tega dela valja, ki ima prostornino enako prostornini modela Merkurja $V_{♀}$, je

$$e = \frac{102\,\mathrm{cm}}{37{,}14} = 2{,}75\,\mathrm{cm}.$$

Merkur izdelamo iz $2{,}75\,\mathrm{cm}$ dolgega odseka valja (enote), Venero pa na primer iz 15,3 enot, kar pomeni $15{,}3 \cdot 2{,}75\,\mathrm{cm} = 42{,}0\,\mathrm{cm}$ dolg odsek valja.

Glede na dolžino prvotnega dolgega valja (v našem primeru 102 cm) izračunamo dolžine odsekov, ki ustrezajo modelom posameznih planetov in Lune ter jih vpišemo v tabelo 4. Za učence pripravite tabelo, v katero sami vpišejo izračunane številke.

Naposled dolg valj razrežemo na ustrezno dolge odseke in iz vsakega oblikujemo kroglico. Če so kroglice iz polimerne mase (in ne navadnega plastelina), jih spečemo po navodilih proizvajalca.

Tabela 4: Dolžine odsekov valja, iz katerih izdelamo modele planetov.

planet/ luna	**polmer³ [$(r_{☿})^3$]**	**dolžina odseka [cm]**
Merkur ☿	1	2,7
Venera ♀	15,3	42,0
Zemlja ♁	17,8	48,9
Luna ☾	0,36	1,0
Mars ♂	2,68	7,4
	vsota	**102,0**

Ko so planeti spečeni

Pri peki se polimerni masi ne spremenita niti masa niti prostornina, kar lahko preverimo, če jih stehtamo pred peko in po njej, in s kljunastim merilom izmerimo njihov (povprečni) polmer. Pri peki se ohranijo vsa razmerja med polmeri in prostorninami posameznih modelov planetov.

Merjenje mase planetov po peki priporočamo. Skupna masa je enaka masi, ki smo jo imeli na začetku. Če za priložnostno enoto za maso izberemo maso modela Merkurja in maso vseh ostalih modelov izrazimo z njo, bomo, presenetljivo ali pričakovano, dobili enaka razmerja, kot so zapisana v 3. stolpcu tabele 3. Priporočamo, da se dodatnim merskim negotovostim izognete z uporabo natančne laboratorijske tehtnice (še posebej zato, ker so modeli planetov majhni in imajo majhno maso, zato se vsaka absolutna sistematična merska negotovost, povezana z uporabo ne dovolj natančnih gospodinjskih tehtnic, prevede v veliko relativno negotovost).

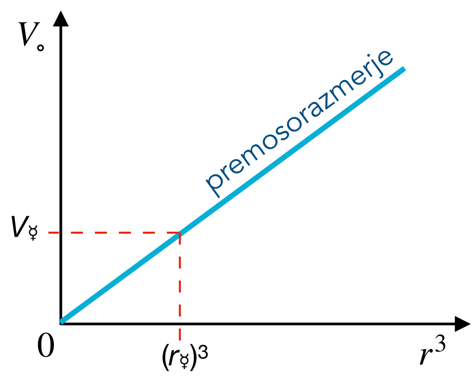
Priporočamo tudi merjenje (povprečnega) premera modelov planetov. Pričakovan rezultat, če za enoto premera vzamemo premer modela Merkurja in premer ostalih modelov izrazimo z njim, so faktorji, zapisani v 2. stolpcu tabele 2.

Pri obeh meritvah so seveda možna in pričakovana odstopanja, ki so povezana z natančnostjo izdelave modelov planetov. Viri napak so lahko:

- neenakomerna debelina dolgega valja iz polimerne mase, ki ga naredimo na začetku,
- prekratka dolžina dolgega valja in napak pri odmerjanju dolžin odsekov (ista absolutna napaka ima večjo relativno težo),
- ne dovolj okrogli modeli (zato določamo *povprečni* premer),
- napake pri odmerjanju dolžine odsekov,
- napake v računanju razmerij ipd.

Bistvo metode

Brez uporabe tehtnice smo kup polimerne mase, ki je bil v celoti na voljo za izdelavo modelov planetov, uspeli razdeliti na pravilne dele, da so izdelani modeli planetov ohranili naravna razmerja med velikostmi planetov v naravi. Kako nam je to uspelo z dolgim valjem?



V 3. stolpcu tabele 3 so zapisana razmerja med prostorninami planetov, ki se skalirajo s 3. potenco polmera planeta (ki smo jo izračunali). Prostornina valja pa se skalira z 2. potenco polmera osnovne ploskve in **1. potenco višine valja** (je sorazmerna z višino valja). Dolg enakomerno debel valj smo razrezali na krajše valje, ki so imeli vsi enak polmer osnovne ploskve in različne višine. Če jih primerjamo le med seboj, je prostornina posameznega krajšega valja sorazmerna z njegovo višino. Višino posameznega odseka smo enostavno izmerili z merilnim trakom, da je ustrezala prostornini modela posameznega planeta. Postopku se učeno reče *linearizacija*; namesto polmera planeta r vpeljemo novo spremenljivko r^3, od katere je višina krajšega valja, ki ga uporabimo za izdelavo modela tega planeta v merilu, linearno odvisna, kot prikazuje graf 1. Abstraktni postopek linearizacije smo prevedli v konkretno dejavnost s snovjo.

Variacije na temo — likovni učinki

Pred začetkom dejavnosti lahko učenci med seboj izmenjajo dele polimerne mase različnih barv, ki jih prepletejo, da so potem njihovi modeli planetov pisani in likovno zanimivi. Pri tem kombiniranju ni zelo pomembno, da si izmenjajo enake dele polimerne mase; vsak učenec ima lahko na koncu malo več ali malo manj, kot je imel na začetku, kar ne vpliva na njegov set planetov: ti so med seboj v pravilnem razmerju ne glede na to, koliko polimerne mase je imel na začetku. Seveda pa primerjava med različnimi seti (ki jih izdelajo različni učenci) po tem ni mogoča (niti nujna).

Če kombiniramo polimerno maso dveh (ali več) različnih barv, moramo ta dva dela najprej dobro zgnesti skupaj, da se barvi prepleteta. Ne pa preveč; ne želimo nove homogene barve, ampak bolj marmorni učinek.

Variacije na temo — razmerje mas planetov

Modele planetov vse izdelamo iz iste polimerne mase in imajo zato vsi enako gostoto. Masa modela planeta je sorazmerna s prostornino modela, sorazmernosti koeficient je gostota polimera ρ. Zato nas ne preseneti, da so razmerja mas modelov planetov z maso modela Merkurja (približno) enaka faktorjem v 3. stolpcu tabele 3.

Planeti (in Luna) v naravi pa nimajo vsi iste gostote, ampak take, ki so zapisane v tabeli 5 (vir: Wikipedia).

Na koncu se z učenci lahko pogovorimo tudi o tem. Vprašanje je lahko, kaj bi morali upoštevati pri izbiri snovi, iz katere naredimo posamezni model planeta, da bodo v pravilnem razmerju poleg "velikosti" tudi mase planetov, in kaj, da bodo v pravilnem razmerju še gostote planetov.

Tabela 5: Masa in povprečna gostota planetov in Lune.

planet/ luna	**masa [kg]**	**masa/ masa ♁ [$M_\oplus$]**	**povprečna gostota [kg/dm³]**
Merkur ☿	$3{,}3011 \cdot 10^{23}$	0,055	5,427
Venera ♀	$4{,}8675 \cdot 10^{24}$	0,815	5,243
Zemlja ♁	$5{,}972 \cdot 10^{24}$	1	5,513
Luna ☾	$7{,}346 \cdot 10^{22}$	0,0123	3,344
Mars ♂	$6{,}4171 \cdot 10^{23}$	0,107	3,9335
Jupiter ♃	$1{,}8982 \cdot 10^{27}$	317,8	1,326
Saturn ♄	$5{,}6834 \cdot 10^{26}$	95,16	0,687
Uran ⛢	$8{,}681 \cdot 10^{25}$	14,54	1,27
Neptun ♆	$1{,}024 \cdot 10^{26}$	17,15	1,638

Zgodba se lahko še nadaljuje. Podatke o povprečni gostoti planetov lahko navežemo na agregatno stanje snovi, ki gradi planet, itd.

Prostornina telesa narašča s 3. potenco linearne razsežnosti telesa

Če imamo na voljo več časa, ali pa se odločimo, da je glavni cilj dejavnosti ozaveščanje odvisnosti prostornine 3-dimenzionalnih teles od njihove (povprečne) linearne dimenzije, lahko dejavnost izdelave planetov v merilu začnemo drugje.

Začetno vprašanje, ki ga naslovimo, je: **za koliko se spremeni prostornina krogle (kocke), če se polmer krogle (rob kocke) poveča?**

Polimerno maso razvaljamo v enakomerno debel dolg valj (dolg vsaj 1 m). Valj razrežemo na različno dolge odseke (1 cm, 2 cm, 3 cm …) in iz vsakega oblikujemo kroglico (kocko). Prostornina najkrajšega odseka (npr. 1 cm) je enota za prostornino V_e. Očitno je, da je prostornina odseka, ki je 2-krat (3-krat) tako dolg, 2-krat (3-krat) tolikšna. Kroglice (kocke) spečemo (pazimo, da jih med seboj ne zamešamo, ker so si vedno bolj podobne …) in ko so spečene, s kljunastim merilom izmerimo njihov premer (rob).

Podatke zapišemo v tabelo; denimo, da ima najmanjša kroglica premer $2r_e = 2{,}5\,\mathrm{mm}$. V 3. stolpcu je razmerje med premerom posamezne kroglice in premerom najmanjše (prve) kroglice. V 4. stolpcu so izračunane vrednosti kvadrata premera, in v 6. izračunane vrednosti 3. potence premera. V 5. in 7. stolpcu so izračunana razmerja teh dveh potenc premera kroglic in ustrezne potence premera najmanjše kroglice. Ugotovimo, da vrednosti v 7. stolpcu naraščajo enako kot prostornine kroglic, iz česar sklepamo, da je prostornina kroglice sorazmerna tretji potenci premera kroglice.

Da si skrajšamo muke, je morda dovolj, če primerjamo premera prve (najmanjše) kroglice in 8. kroglice: njuna premera se razlikujeta za faktor 2, prostornini pa za 8, kar je 2^3.

Tabela 6: Prostornina in premer krogle.

prostornina [V_e]	**premer** [mm]	**premer/ premer (1.)**	**premer^2** [mm^2]	**premer^2/ premer (1.)^2**	**premer^3** [mm^3]	**premer^3/ premer (1.)^3**
1	2,5	1	6,25	1	15,6	1
2	3,2	1,28	10,24	1,64	32,8	2,1
3	3,6	1,44	12,96	2,07	46,6	3,0
⋮						
8	5,0	2	25,0	4	125,9	8,1
⋮						